EJERCICIOS DE RECUPERACIÓN

MATEMÁTICAS I

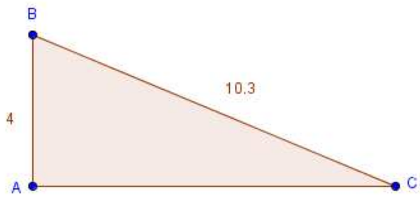
(PARTE 2)

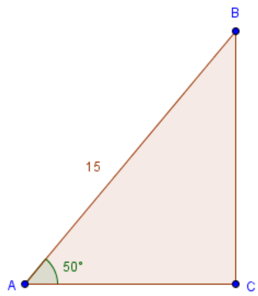
TEMA 4: TRIGONOMETRÍA

1. Completa esta tabla, utilizando para ello las relaciones fundamentales:

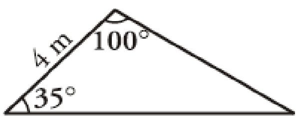
sen α	0'92				0'2	
cos α			0'12			0'5
tg α		0'75		1'12		

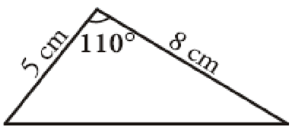
2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

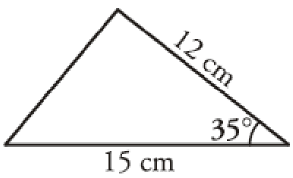
a) 

b) 

3. Resuelve los siguientes triángulos:

a) 

b) 

c) 

4. Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10°, y si nos aproximamos a la torre 50 m observamos que el ángulo es ahora de 25°. ¿Qué altura tiene la torre? ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?

5. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos mediante ángulos del primer cuadrante:
a) $\sin 140°$ b) $\cos 205°$ c) $\tan 300°$

6. Halla el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°.

7. Calcula el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m y forman entre ellos un ángulo de 70°.

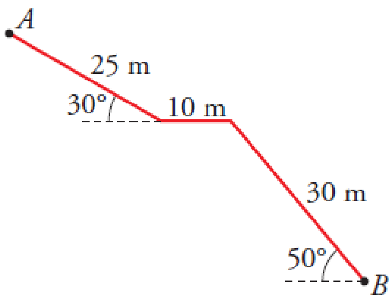
8. La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Calcula los radios de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

9. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de A a C es 6 km, y la de B a C 9 km. El ángulo que forman estas carreteras es 120°. ¿Cuánto distan A y B?

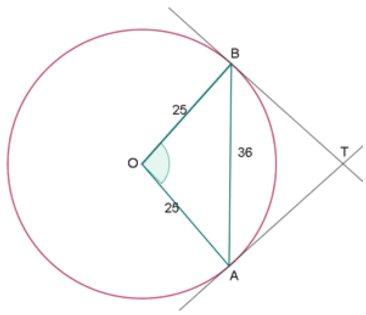
10. Las diagonales de un paralelogramo miden 10 cm y 12 cm, y el ángulo que forman es de 48°. Calcula el perímetro de dicho paralelogramo.

11. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

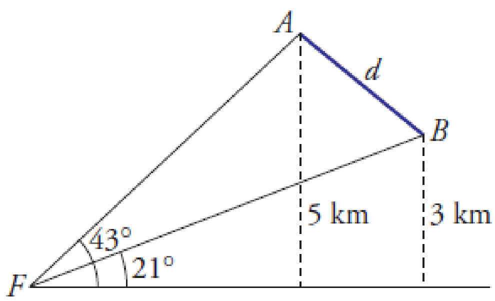
12. Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y dimensiones de la figura. Calcula la profundidad del punto B.



13. El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.



14. Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa, y un barco B bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.



15. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) $148°$ b) $29°$ c) $90°$

16. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) $\frac{\pi}{6}\ rad$ b) $\frac{3\pi}{4}\ rad$ c) $5\,rad$

17. Si $\sin 20° = 0{,}34$ y $\sin 55° = 0{,}82$, calcula $\cos 20°$, $\tan 20°$, $\cos 55°$ y $\tan 55°$. Después, a partir de ellas, calcula las razones trigonométricas de $75°$ y $35°$.

18. Si $\sin 40° = 0{,}64$, calcula $\cos 40°$ y $\tan 40°$. Después, a partir de ellas, calcula las razones trigonométricas de $80°$ y $40°$.

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x = 1 + 4\sin x$ b) $\sin(2x + 60°) + \sin(x + 30°) = 0$

c) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ d) $\cos 8x + \cos 6x = 2\cos 210° \cdot \cos x$

e) $\tan 2x = -\tan x$ f) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$

g) $2\cos x = 3\tan x$

20. Demuestra que: $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

TEMA 5: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Expresa los siguientes números complejos de las otras dos formas posibles:

   a) $2+i$ b) 5_{60° c) $4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

2. Si $z=4-2i$, $w=3+i$, $t=-1+i$, calcula en forma binómica:

   a) $z+w-t$ b) $z\cdot w$ c) $\frac{t}{w}$ d) $\frac{\bar{z}+w}{\bar{z}+t}$

3. Calcula a y b de modo que se verifique: $(a+bi)^2=3+4i$

4. Calcula el valor de a para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.

5. Calcula el valor de k para que el número complejo $\frac{2+i}{k+i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

6. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $\frac{(3_{20^\circ})^3}{2_{60^\circ}}$ b) $(1+i)^{10}$

   c) $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

7. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1+2i$ y su conjugado.

8. Expresa en forma polar y en forma binómica los números complejos cuyo cubo sea: $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones y representa sus soluciones:

   a) $z^8+1=0$ b) $z^5+32=0$ c) $z^2+z=-1$

10. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es 6, y la suma de sus módulos es 10. Calcula esos números complejos en forma binómica y en forma polar.

11. El número complejo 2_{60° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices. (Recuerda: para girar un número complejo un ángulo β, se multiplica ese número por 1_β).

TEMA 6: GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene por coordenadas $(5,-2)$. Calcula las coordenadas del origen A si se conocen las del extremo $B(12,-3)$.

2. Calcula la distancia entre los puntos $A(2,1)$ y $B(-3,2)$.

3. Dado el vector $\vec{v}(3,4)$, calcula un vector unitario de su misma dirección y sentido.

4. Calcula las coordenadas del punto D para que el cuadrilátero de vértices $A(-1,-2)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$ y D sea un paralelogramo.

5. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB de extremos $A(3,9)$ y $B(-1,5)$.

6. Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(4,-2)$ respecto de $M(2,6)$.

7. Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{v}(k,3)$ es 5.

8. Dados los vectores $\vec{u}(1,2)$ y $\vec{v}(3,-1)$, calcula el vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

9. Suponiendo que respecto de la base ortonormal $\{\vec{u},\vec{v}\}$ los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen como expresiones $\vec{a} = -2\vec{u} + k\vec{v}$ y $\vec{b} = 5\vec{u} - 3\vec{v}$, calcula el valor de k sabiendo que $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$.

10. Dados los vectores $\vec{u}(2,k)$ y $\vec{v}(3,-2)$, calcula el valor de k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean:
    a) Perpendiculares.
    b) Paralelos.
    c) Formen un ángulo de 60°.

11. Calcula los ángulos del triángulo de vértices $A(6,0)$, $B(3,5)$ y $C(-1,-1)$.

12. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen el mismo módulo, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.
    a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?
    b) Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

13. Calcula las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que los puntos medios de sus lados son $M(1,4)$, $N(-1,2)$ y $P(-4,1)$.

14. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(2,4)$ y $\vec{v}(-1,3)$.

15. Dados los vectores $\vec{u}(1,k)$ y $\vec{v}(3,-2)$, calcula el valor de k para que:

    a) Los dos vectores formen un ángulo de 90°.

    b) Los dos vectores tengan el mismo módulo.

16. De una base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ se sabe que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$. Sean $\vec{x}(-1,1)$ e $\vec{y}(1,2)$ las coordenadas de dos vectores en esa base. Calcula $\vec{x}\cdot\vec{y}$.

17. Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ siendo $A(1,-2)$, $B(-1,2)$ y $C(-4,-1)$.

18. Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(5,9)$, halla:

    a) El punto medio del segmento AB.

    b) El punto simétrico de A respecto de B.

    c) La distancia entre A y B.

19. Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita y explícita de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,-5)$.

20. Calcula el valor de k para que la recta $r: y=kx+1$ sea:

    a) Paralela a la recta $s_1: 2x-y+4=0$.

    b) Perpendicular a la recta $s_2: \begin{cases} x=5-3t \\ y=3-2t \end{cases}$

21. Averigua la posición relativa de las rectas $r: 3x-5y=0$, $s: \begin{cases} x=2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$.

22. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1)$, $B(3,2)$ y $C(-1,3)$.

23. Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}$ y $s: 4x-2y+2=0$. Calcula su área.

24. El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, y es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.
    Calcula el circuncentro del triángulo de vértices $A(5,1)$, $B(2,4)$ y $C(-1,1)$ y el radio que tendrá dicha circunferencia circunscrita.

TEMA 7: LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

1. Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:
   a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
   b) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$

2. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2, -3)$ y es tangente al eje de abscisas.

3. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $r_1: x + 3y + 3 = 0$ y $r_2: x + y + 1 = 0$ y su radio es igual a 5.

4. Calcula la ecuación de la circunferencia concéntrica con $C: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ y que pasa por el punto $(-3,4)$.

5. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(5,7)$.

6. Estudia la posición relativa de la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ y la recta $r: x + 7y - 20 = 0$.

ELIPSE

7. Halla la ecuación de la elipse de la que se conocen $C(0,0)$, $F(2,0)$, $A(3,0)$.

8. Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por el punto $(2,1)$ y cuyo eje menor mide 4.

9. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6 respectivamente. Calcula la ecuación reducida de dicha elipse.

HIPÉRBOLA

10. Halla la ecuación de una hipérbola de eje focal 8 y distancia focal 10.

11. Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los vértices de la hipérbola 50 y 2.

PARÁBOLA

12. Determina la ecuación de las siguientes parábolas:
    a) Directriz $x = -3$, foco $(3,0)$.
    b) Foco $(2,0)$, vértice $(0,0)$.
    c) Foco $(3,4)$, vértice $(1,4)$.

13. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas y pasa por el punto $(3,4)$, siendo su eje OX.

LUGARES GEOMÉTRICOS

14. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $r: y = 0$ es igual a la distancia al punto $P(2,4)$. ¿Qué figura obtienes?

15. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $P_1(3,2)$ y $P_2(1,-2)$ es igual a 6.